第四章　三角恒等变换

§1　同角三角函数的基本关系

1.1　基本关系式+1.2　由一个三角函数值求其他三角函数值+1.3　综合应用

对点上分

1. C　【解析】由题意，$\sin\alpha=-\frac{1}{2}\cos\alpha$，

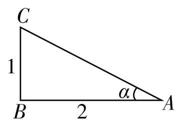
由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

联立可得 $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$.

因为 α 为第四象限角，

所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故 C 正确.

一题多解　由题可知 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，则 $|\tan\alpha|=\frac{1}{2}$，因此可构造如图所示的直角三角形，设 $BC=1$，$AB=2$，则 $AC=\sqrt{5}$，$|\cos\alpha|=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，因为 α 为第四象限角，所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故 C 正确.



易错警示　忽略题目中角的范围的限制而致错

在使用开平方关系 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ 和 $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ 时，一定要注意正负号的选取，确定正负号的依据是角 α 的终边所在的象限. 若角 α 的终边所在的象限是已知的，则按三角函数在各个象限的符号来确定；若角 α 的终边所在的象限是未知的，则需要按象限进行讨论.

2. B 【解析】因为 $2\sin\alpha-\cos\alpha=1$，

所以 $\cos\alpha=2\sin\alpha-1$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

所以 $\sin^2\alpha+(2\sin\alpha-1)^2=1$，

即 $5\sin^2\alpha-4\sin\alpha=0$，

又 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，所以 $\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}=\frac{1}{\frac{24}{25}-\frac{9}{25}}=\frac{5}{3}$. **故 B 正确.**

3. C 【解析】因为 $\sin\theta=\frac{k-3}{k+5}$，$\cos\theta=\frac{4-2k}{k+5}$，且 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，所以 $\left(\frac{k-3}{k+5}\right)^2+\left(\frac{4-2k}{k+5}\right)^2=1$，解得 $k=0$ 或 $k=8$.

若 $k=0$，则 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$\cos\theta=\frac{4}{5}$，此时角 θ 的终边在第四象限；

若 $k=8$，则 $\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=-\frac{12}{13}$，此时角 θ 的终边在第二象限，

所以角 θ 的终边在第二象限或第四象限. **故 C 正确.**

4. B 【解析】因为 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故 B 正确.

归纳总结 已知角 α $\left(\alpha\neq\frac{n\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}\right)$ 的一个三角函数值，求角 α 的其他三角函数值，一般分成如下三种类型：

类型 1：值确定且角 α 的终边所在象限确定，则角 α 的其他三角函数值也唯一确定.

类型 2：值确定但角 α 的终边所在象限不确定，则需要分类讨论，按已知三角函数值的符号确定角 α 的终边所在象限，然后分别求相应象限下的其他三角函数值.

类型 3：值不确定（有时用字母表示）且角 α 的终边所在象限不确定，则需要分类讨论，首先确定三角函数值的符号，然后再求其他的三角函数值.

5. ABD　【解析】由 $\sin\theta=-2\cos\theta$ 可得 $\tan\theta=-2<0$，所以 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=2$，故 A，B 正确，C 错误.

$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $x+\theta\in\left(\theta,\frac{\pi}{2}+\theta\right)$，由于 $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\frac{\pi}{2}+\theta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，

所以 $f(x)=\sin(x+\theta)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 D 正确.

6. $-\frac{2}{5}$

攻略上分 本题为已知 $\tan\theta$，求形如 $a\sin^2\theta+b\sin\theta\cos\theta+c\cos^2\theta$ 的整式的值的问题，具体可见大招攻略 29 中第一种的(3).

【解析】由已知得 $\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)=\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta=\frac{\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta-\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2-2^2}{2^2+1}=-\frac{2}{5}$.

归纳总结 解决齐次式问题的主要方法是化切求值，具体思路如下：

(1) 已知 $\tan\alpha=m$，求形如 $\frac{a\sin\alpha+b\cos\alpha}{c\sin\alpha+d\cos\alpha}$ 或 $\frac{a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha}{d\sin^2\alpha+e\sin\alpha\cos\alpha+f\cos^2\alpha}$ 的分式的值，可以将分子、分母同时除以 $\cos\alpha$ 或 $\cos^2\alpha$，化成关于 $\tan\alpha$ 的式子，从而求值.

(2) 形如 $a\sin^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha$ 的式子求值，可将其看成分母是 1 的式子，利用 $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 进行变形后，分子、分母同时除以 $\cos^2\alpha$，化成关于 $\tan\alpha$ 的式子，从而求值.

7. A　【解析】$\because\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$，

$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=2$，解得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore \tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$. 故 A 正确.

8. B 【解析】由 $\theta\in(0,\pi)$, $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$, 得 $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{25}$, 解得 $2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{24}{25}<0$,

又 $\sin\theta>0$, 则 $\cos\theta<0$, $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 故 A 正确;

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{7}{5}$, 故 D 正确;

由 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{5}$, $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{7}{5}$, 得 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$, 故 B 错误;

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{3}{4}$, 故 C 正确.

规律点拨 对于 $\sin\alpha+\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin\alpha-\cos\alpha$ 这三个式子, 利用 $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm2\sin\alpha\cos\alpha$ 可以实现"知一求二".

9. $-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$ 【解析】因为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 是关于 x 的方程 $4x^2+2\sqrt{6}x+m=0$ 的两个实数根, 所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{m}{4}$, 方程的判别式 $\Delta=24-16m\geqslant0$, 所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1$, 即 $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\times\dfrac{m}{4}=1$,

解得 $m=1$, 满足 $\Delta>0$.

所以 $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha)=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

10. ABD 【解析】$\dfrac{2\tan\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin\alpha}=2$,

故 A 正确;

$\dfrac{\sqrt{1-2\sin10°\cdot\cos10°}}{\sin10°-\sqrt{1-\sin^2 10°}}$

$=\frac{\sqrt{(\cos 10°-\sin 10°)^2}}{\sin 10°-\cos 10°}$

$=\frac{\cos 10°-\sin 10°}{\sin 10°-\cos 10°}=-1$,**故 B 正确;**

若 $\tan x=\frac{1}{2}$,则 $\frac{2\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{2\tan x}{1-\tan x}=$

$\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2$,**故 C 错误;**

若 $\sin \theta\cos \theta=\frac{1}{2}$,则 $\tan \theta+\frac{\cos \theta}{\sin \theta}=$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta}+\frac{\cos \theta}{\sin \theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin \theta\cos \theta}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$,**故 D 正确.**

11. $-\frac{2}{\sin \alpha}$　**【解析】**由题意知 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$,

故 $\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\cos \alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}+\sqrt{\frac{(1+\cos \alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}}$

$=\left|\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}\right|+\left|\frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}\right|$

$=-\frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha}-\frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}$

$=-\frac{2}{\sin \alpha}$.

12. $-\frac{1}{2}$　**【解析】**因为 α 为第一象限角,所以 $\cos \alpha>0$,

所以 $1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=(\cos \alpha)^{-2}$,

则 $\log_{(1+\tan^2\alpha)}\cos \alpha=\frac{\lg \cos \alpha}{\lg(\cos \alpha)^{-2}}=$

$\frac{\lg \cos \alpha}{-2\lg \cos \alpha}=-\frac{1}{2}$.

13. **攻略上分**　利用同角三角函数的基本关系进行证明,具体可见通法攻略 30.

【证明】(1)左边 $=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1=$右边.

(2)右边 $=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1-2\sin \alpha+$

$2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$=2(1-\sin\alpha+\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)$

$=2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=$左边.

14.【解】(1)$f(\alpha)=\dfrac{-\cos\alpha\sin\alpha\tan^2\alpha}{\sin\alpha(-\sin\alpha)}=$

$\dfrac{-\cos\alpha\cdot\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{-\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$

(2)由(1)得 $\tan\alpha=2$,

所以 $\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha$

$=\dfrac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4-6}{4+1}=-\dfrac{2}{5}.$

(3)由(1)得 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=3$,令 $\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\theta$,则 $\alpha=\theta+\dfrac{\pi}{6}$,

所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\dfrac{1}{\tan\theta}=3$,

所以 $\tan\theta=-\dfrac{1}{3}$,又 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{3}$,

所以 $\cos\theta=-3\sin\theta$,代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,得 $\sin\theta=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,所以 θ 为第二或第四象限角.

当 θ 为第二象限角时,$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,即 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$;

当 θ 为第四象限角时,$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$,即 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

15. D　【解析】$\because A$ 为 $\triangle ABC$ 的内角且 $\sin A\cos A=-\dfrac{1}{8}<0$,$\therefore\sin A>0$,$\cos A<0$,$\therefore\cos A-\sin A<0$.

而 $(\cos A-\sin A)^2=1-2\sin A\cos A=1-2\times\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{5}{4}$,$\therefore\cos A-\sin A=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

故 D 正确.

16. C　【解析】A 为 $\triangle ABC$ 的一个内角,若

$\sin A+\cos A=\frac{12}{25}$，则$(\sin A+\cos A)^2=\left(\frac{12}{25}\right)^2$，由同角三角函数的基本关系展开化简可得 $1+2\sin A\cos A=\frac{144}{625}$，则 $\sin A\cos A=-\frac{481}{1\,250}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，所以 $\cos A<0$，则 A 为钝角，所以$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

故 C 正确.

17. C 【解析】设大正方形的边长为 a，则直角三角形的直角边长分别为 $a\sin\alpha$，$a\cos\alpha$，$\because\alpha$ 为直角三角形较小的锐角，

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，$S_1=a^2$，$S_2=S_1-4\times\frac{1}{2}a\sin\alpha\cdot a\cos\alpha=a^2-2a^2\sin\alpha\cos\alpha$，则 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{a^2-2a^2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=25$，

即$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=25$，

$\therefore\frac{\tan^2\alpha+1}{\tan^2\alpha+1-2\tan\alpha}=25$，解得 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$或 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$(不合题意，舍去)，

$\therefore\frac{3\sin\alpha+\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{3\tan\alpha+1}{2\tan\alpha-1}=\frac{3\times\frac{3}{4}+1}{2\times\frac{3}{4}-1}=\frac{13}{2}$. **故 C 正确.**

能力上分

1. B 【解析】因为 $\theta\in(3\pi,4\pi)$，

$\tan\theta=-\frac{4}{3}<0$，所以 θ 是第四象限角，

所以 $\sin\theta<0$，而 $\tan\theta=-\frac{4}{3}$，故 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$，化简得 $\cos\theta=-\frac{3}{4}\sin\theta$，

又 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，代入得 $\frac{9}{16}\sin^2\theta+\sin^2\theta=1$，解得 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$(正根舍去)，

故 B 正确.

2. C 【解析】因为 $\cos\theta|\cos\theta|+\sin\theta|\sin\theta|=-1=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$，

所以$|\sin\theta|=-\sin\theta$，$|\cos\theta|=-\cos\theta$，

所以 $\cos\theta\leqslant0$，$\sin\theta\leqslant0$，又角 θ 的终边不在坐标轴上，所以 θ 为第三象限角.

故 C 正确.

3. A　【解析】因为 $\frac{\sin\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{4}{3}$，

设 $\sin\alpha+\cos\alpha=t(t\neq0)$，

则 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}$，所以 $\frac{t^2-1}{2t}=\frac{4}{3}$，即 $t^2-\frac{8}{3}t-1=0$，即 $(t-3)\left(t+\frac{1}{3}\right)=0$，所以 $t=-\frac{1}{3}$ 或 $t=3$（舍），

所以 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{t^2-1}{2}==-\frac{4}{9}<0$，

$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}$

$=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-4\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{\sqrt{17}}{3}$.

故 A 正确.

4. (1)【解】原式 $=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}$

$=\frac{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1-\cos^4\alpha)+\sin^2\alpha(1-\sin^4\alpha)}$

$=2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\div[\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)]$

$=\frac{2\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)}$

$=\frac{2}{1+\cos^2\alpha+1+\sin^2\alpha}=\frac{2}{3}$.

(2)【证明】左边 $=\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)+\cos\alpha\cdot\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=\sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=$ 右边.

即原等式成立.

5.【解】(1) $\because\ \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，

$\therefore\ \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，

即 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{25}$，

所以 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$.

由 θ 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，得 $0<\theta<\pi$，则 $\sin\theta>0$，而 $\sin\theta\cos\theta<0$，则 $\cos\theta<0$，有 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，所以 $\triangle ABC$ 是钝角三角形.

(2) 由 (1) 知，$\sin\theta>0>\cos\theta$，

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$，

所以 $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{1-2\times\left(-\frac{12}{25}\right)}=\frac{7}{5}$.

6.【解】(1) $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$，

因为 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{2}$，即 $2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，从而 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{2}$，

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha>0$，又因为 $\sin\alpha\cos\alpha<0$，所以 $\cos\alpha<0$，因此 $\sin\alpha-\cos\alpha>0$，

则 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因为 $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1}{3}$，所以 $2\sin\alpha=-4\cos\alpha$，

假设 $\cos\alpha=0$，则由上式知 $\sin\alpha=0$，与 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 矛盾，所以 $\cos\alpha\neq0$，则 $\tan\alpha=-2$.

则 $\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-3\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=2$.

一题多解 (1) 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 及 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ 或 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$，

所以 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{2}$，因此 $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)因为 $f(\alpha)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha=-2\cos\alpha$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $5\cos^2\alpha=1$，即 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，因此 $\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha=4\cos^2\alpha+6\cos^2\alpha=10\cos^2\alpha=2$.

§2　两角和与差的三角函数公式

2.1　两角和与差的余弦公式及其应用+2.2　两角和与差的正弦、正切公式及其应用

对点上分

1. AB

攻略上分　本题为给角求值问题，关键是观察所给角与特殊角的关系，进而利用相关公式化简或求值，具体见通法攻略31.

【解析】$\tan 25°+\tan 35°+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=\tan(25°+35°)\cdot(1-\tan 25°\tan 35°)+\sqrt{3}\tan 25°\cdot\tan 35°=\sqrt{3}$，故 A 正确；

$\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

根据诱导公式知 $\sin(2\ 024\pi-\theta)=-\sin\theta$，故 C 错误；

$\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 错误.

2. D

攻略上分　本题先根据三角函数的定义求出三角函数值，实质为给值求值问题，具体见通法攻略32.

【解析】因为 $P\left(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3}\right)$,

即 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

即角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\alpha=\frac{1}{2}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 D 正确.

3. B 【解析】由题意得 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2},\alpha-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\frac{\pi}{6}<-\frac{\pi}{4}$, 故 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,

则 $\sin\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2-\sqrt{15}}{6}$,

故 B 正确.

易错警示 忽略角的隐含范围致错

对于求值、求角问题，应尽量缩小角的范围. 缩小角的范围大致可从以下四个方面考虑:①利用已知角的范围确定所求角的范围;②利用三角函数值的符号确定所求角的范围;③利用三角函数值的大小进一步缩小所求角的范围;④利用题干中隐含角的范围的条件来确定所求角的范围.

4. A 【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$,

因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\alpha+\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{5}$,

则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故 A 正确.

5. C

攻略上分 本题为给值求角问题,先确定待求角的三角函数值,再结合待求角的范围确定待求角的大小,具体见通法攻略 33.

【解析】因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

因为 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,所以 $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{2}$,所以 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$.

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\alpha-\beta\in\left(\frac{13\pi}{12},\frac{3\pi}{2}\right)$,所以 $\alpha-\beta=\frac{5\pi}{4}$,**故 C 正确.**

6. B 【解析】由题意及题图得,$\tan\alpha=\frac{1}{3}$,$\tan\beta=\frac{1}{2}$,$\therefore\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$. $\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. **故 B 正确.**

7. C 【解析】因为点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 关于 x 轴的对称点为 $B\left(\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right),\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right)$,所以 $\begin{cases}\cos\alpha=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right),\\ \sin\alpha=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right),\end{cases}$

即$\begin{cases}\cos\alpha=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3},\\ \sin\alpha=-\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$

即$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=0,\\ \dfrac{3}{2}\sin\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=0,\end{cases}$

所以 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，所以 $\alpha-\dfrac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

故 C 正确.

8. A 【解析】$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]+\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$

$=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\times\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{12}\right)\times\left(\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{12}\right)=\dfrac{1}{3}.$

所以$\dfrac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}=\dfrac{1}{6}$. 故 A 正确.

9. C 【解析】因为 $\sin(\alpha-\beta)=2\cos(\alpha+\beta)$，

所以 $\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$，

又易知 $\cos\alpha\cos\beta\neq0$，

所以两边同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$，得到 $\tan\alpha-\tan\beta=2-2\tan\alpha\cdot\tan\beta$，即 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1-\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{2}$.

故 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+1-\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{4}{5}$.

故 C 正确.

10. A 【解析】由 $\sin B\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos B\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(C+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)$，

得 $\sin B\sin\left(C-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos B\cdot\cos\left(C-\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)$，即 $\cos B\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)-\sin B\cdot\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=0$，

所以 $\cos\left(B+C-\frac{\pi}{6}\right)=0$，又 $0<B+C<\pi$，

所以 $B+C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $B+C=\frac{2\pi}{3}$，所以

$A=\frac{\pi}{3}$，**故 A 正确.**

11. C　【解析】$2\sin\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=2\sin\alpha\tan\beta\tan\gamma$，即 $2\sin\alpha+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=2\sin\alpha\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$，故

$\frac{\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}=2\sin\alpha\cdot\left(\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}-1\right)$，

所以 $\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma}=2\sin\alpha\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma}{\cos\beta\cos\gamma}$，

所以 $\sin(\beta+\gamma)=-2\sin\alpha\cdot\cos(\beta+\gamma)$，

因为 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，所以 $\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha$，$\cos(\beta+\gamma)=-\cos\alpha$，所以 $\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\sin\alpha\neq0$，所以 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，解得 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

故 C 正确.

12. $\frac{4}{9}$　【解析】因为 $\tan\alpha=3\tan\beta$，所以 $\sin\alpha\cos\beta=3\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

所以 $\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{9}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$.

13. $\sqrt{3}$　【解析】因为 $\cos(20°-\theta)+\cos(20°+\theta)-\cos(40°-\theta)=0$，

所以 $\cos20°\cos\theta+\sin20°\sin\theta+\cos20°\cos\theta-\sin20°\sin\theta-\cos40°\cos\theta-\sin40°\sin\theta=0$，

得 $2\cos20°\cos\theta-\cos40°\cos\theta-\sin40°\sin\theta=0$，

所以 $2\cos20°-\cos40°-\sin40°\cdot\tan\theta=0$，

则 $\tan\theta=\dfrac{2\cos 20°-\cos 40°}{\sin 40°}$

$=\dfrac{2\cos(60°-40°)-\cos 40°}{\sin 40°}$

$=\dfrac{2(\cos 60°\cos 40°+\sin 60°\sin 40°)-\cos 40°}{\sin 40°}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin 40°}{\sin 40°}=\sqrt{3}$.

14. 2^{22} 【解析】若 $\alpha+\beta=45°$,

则 $(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)$

$=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta$

$=1+\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$,

因此 $(1+\tan 1°)(1+\tan 44°)=2$,

$(1+\tan 2°)(1+\tan 43°)=2$,

…

$(1+\tan 22°)(1+\tan 23°)=2$,

所以原式 $=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{22个2}=2^{22}$.

15. 攻略上分 本题第(1)问中,在化简三角函数式时,利用了"异角化同角"及"异名化同名"的方法,最终化简为只含有 tan α 的等式进而求解,具体见大招攻略35.

【解】(1)$\because \dfrac{6\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\cos(\pi-\alpha)-3\sin(\pi+\alpha)}=-8$, $\therefore \dfrac{6\sin\alpha+\cos\alpha}{-2\cos\alpha+3\sin\alpha}=\dfrac{6\tan\alpha+1}{-2+3\tan\alpha}=-8$,

解得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.

(2)$\because \beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}+\beta<\dfrac{3\pi}{4}$.

$\because \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore \cos\beta=\cos\left[\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$, $\therefore \sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, 则 $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$, $\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=1$, 又 $\because \alpha+\beta\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\therefore \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

16. 【解】(1)$\because C=\pi-(A+B)$,

$\therefore \tan C=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)$,

$\therefore \tan C=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$,

$\therefore \tan C(1-\tan A\tan B)=-(\tan A+\tan B)$,

$\therefore \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

①$\tan 20°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\cdot\tan 40°$

$=\tan 20°+\tan 40°+\tan 120°+\sqrt{3}\tan 20°\cdot\tan 40°+\sqrt{3}$

$=\tan 20°\tan 40°\tan 120°+\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°+\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3}\tan 20°\tan 40°+\sqrt{3}\tan 20°\cdot\tan 40°+\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

②$\dfrac{\tan 20°+\tan 40°+\tan 120°}{\tan 20°\tan 40°}$

$=\dfrac{\tan 20°\tan 40°\tan 120°}{\tan 20°\tan 40°}$

$=\tan 120°=-\sqrt{3}$.

(2)$\because C=135°$, $\therefore 0°<A<45°$, $0°<B<45°$,且$A+B=45°$,

$\therefore \tan A>0$, $\tan B>0$,

$\therefore \tan A+\tan B=-\tan 135°+\tan A\tan B\cdot\tan 135°=1-\tan A\tan B\geqslant 1-\dfrac{(\tan A+\tan B)^2}{4}$, $\therefore (\tan A+\tan B)^2+4(\tan A+\tan B)-4\geqslant 0$,

解得 $\tan A+\tan B\geqslant 2\sqrt{2}-2$ 或 $\tan A+\tan B\leqslant -2\sqrt{2}-2$(舍去),

$\therefore \tan A+\tan B\geqslant 2\sqrt{2}-2$,当且仅当$\tan A=\tan B=\sqrt{2}-1$时取等号,

$\therefore \tan A+\tan B$ 的最小值为$2\sqrt{2}-2$.

方法总结 **证明三角恒等式的思路**

观察等式两端的结构形式,按照从复杂到简单、高次到低次、多角化单角的原则进行处理. 如果等式的两端都比较复杂,那么将两端都化简,采用两端向中间凑的原则处理.

能力上分

1. D 【解析】因为 α 为第三象限角,所以 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$, $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,则 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{3}+$

$\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1+2\sqrt{6}}{6}$. **故 D 正确.**

2. B 【解析】由题意知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos 30°\cos 10°+\sin 30°\cdot\sin 10°=\cos 20°$，

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\cos^2 30°+\sin^2 30°}=1$，

$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\cos^2 10°+\sin^2 10°}=1$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos 20°$，又 $0°\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant 180°$，

所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=20°$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $20°$. **故 B 正确.**

3. A 【解析】由 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，得 $\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，因为 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha+\dfrac{\pi}{3}\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

则 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{4}{5}$，

$\cos\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{3\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{3\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{3\pi}{4}=-\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

故 A 正确.

4. C 【解析】$\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha+\beta\right)$

$=\tan\left[\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\left(\dfrac{\pi}{6}-\beta\right)\right]$

$=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\beta\right)}{1+\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\beta\right)}$

$=\dfrac{3-2}{1+3\times 2}=\dfrac{1}{7}$.

故 C 正确.

5. D 【解析】$\tan\theta=\dfrac{\cos\dfrac{7\pi}{10}+\sin\dfrac{7\pi}{10}}{\cos\dfrac{7\pi}{10}-\sin\dfrac{7\pi}{10}}$

$=\dfrac{1+\tan\dfrac{7\pi}{10}}{1-\tan\dfrac{7\pi}{10}}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{7\pi}{10}}{1-\tan\dfrac{\pi}{4}\tan\dfrac{7\pi}{10}}$

$=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{10}\right)=\tan\dfrac{19\pi}{20}$.

又 $\theta\in(0,2\pi)$，$\cos\frac{7\pi}{10}-\sin\frac{7\pi}{10}<0$，

所以 $\theta=\frac{19\pi}{20}$，**故选 D.**

6. A 【解析】由 $\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{\cos\beta}$，

得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{1}{\cos\beta}$，

故 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\cos\alpha$，

即 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

得 $0<\alpha+\beta<\pi$，$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{\pi}{2}$，

则 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 或 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-\alpha=\pi$，

即 $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\beta+\frac{\pi}{2}=\pi$，

故 $2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\beta=\frac{\pi}{2}$（舍）.

故 A 正确.

7. $\frac{13}{14}$ 【解析】由 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，由 $\varphi\in[0,\pi]$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，

故 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$.

又 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{7}$，$0<\alpha<\pi$，即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{7}$，故 $\alpha+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

故 $f(\alpha)=\cos\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{13}{14}$.

8.【解】(1) 由于点 P 在单位圆上，且 α 是锐角，可得 $m=\frac{1}{2}$，

由三角函数定义可知 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$，所以

$$\frac{4\sin^3\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-4\cos(\alpha+\pi)}{2+2\cos^2(5\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}$$

$=\dfrac{4\cos^3\alpha+2\cos^2\alpha+4\cos\alpha}{2+2\cos^2\alpha+\cos\alpha}$

$=2\cos\alpha=1.$

(2)由(1)可知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$,且 α 为锐角,

可得 $\alpha=\angle xOP=\dfrac{\pi}{3}$,

根据三角函数定义可得 $f(\theta)=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$,

因为 $f\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}>0$,

且 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$,

所以 $\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]+\cos\left[\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\pi\right]$

$=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{15}-1}{4}.$

2.3 三角函数的叠加及其应用+

2.4 积化和差与和差化积公式

对点上分

1. D 【解析】依题意,$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$,所以 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故 D 正确.

2. B 【解析】由 $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ 得 $2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2}{3}$,故 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{3}$,$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{3}$,故 B 正确.

3. D 【解析】$\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)=\frac{1}{2}$，$\cos 2x-\cos 2y=-2\sin(x+y)\sin(x-y)=-\sin(x-y)=\frac{1}{4}$，

所以 $\sin(x-y)=-\frac{1}{4}$. **故 D 正确.**

4. C 【解析】$\cos 20°\cos 40°-\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 20°=\frac{1}{2}[\cos(40°+20°)+\cos(40°-20°)]-\frac{1}{2}[\cos(80°+40°)+\cos(80°-40°)]+\frac{1}{2}[\cos(80°+20°)+\cos(80°-20°)]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cos 20°\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\cos 40°\right)+\frac{1}{2}\left(\cos 100°+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 40°+\cos 100°)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[\cos(30°-10°)-\cos(30°+10°)-\sin 10°]$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(2\sin 30°\sin 10°-\sin 10°)=\frac{3}{4}$. **故 C 正确.**

方法总结 利用和差化积与积化和差公式化简三角函数式的关键在于将同名称的正弦函数与余弦函数进行恰当组合. 组合时遵循的原则：①应尽量使两角的和(或差)出现特殊角；②对于特殊角的三角函数式应当求出其值. 和差化积公式与积化和差公式比较复杂，且有时在同一个题目中可能反复使用，要仔细揣摩记忆方法，不要混淆.

5. $-\frac{120}{119}$ 【解析】由和差化积公式得 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{12}{13}$，

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{5}{13}$，则 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=-\frac{5}{12}$.

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$

$\frac{2\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\frac{120}{119}$.

6. C 【解析】由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，得 $f(x)+f(2-x)=0$，即 $-f(x)=f(2-x)$，

则 $f(\sin x+3)+f(\sqrt{3}\cos x)>0$，

即 $f(\sqrt{3}\cos x)>-f(\sin x+3)=f(-1-\sin x)$，

又 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

因此，$\sqrt{3}\cos x>-1-\sin x$，即 $\sqrt{3}\cos x+\sin x>-1$，

则 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2}$，解得 $2k\pi-\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{3}<2k\pi+\frac{7\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以不等式 $f(\sin x+3)+f(\sqrt{3}\cos x)>0$ 的解集是 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$. 故 C 正确.

规律点拨 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，$\forall x\in D$，(1) 存在常数 a,b 使得 $f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 对称；(2) 存在常数 a 使得 $f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

7. B 【解析】$\sin A+\sin B+\sin\left(A+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(B+\frac{\pi}{2}\right)=\sin A+\sin B+\cos A+\cos B=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$，

由正弦函数的性质可知 $\sin A,\sin B\in[-1,1]$，

故 $\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=1$，

则 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$B+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+$

$2k_2\pi, k_1\neq k_2$ 且 $k_1, k_2\in\mathbf{Z}$,

即 $|A-B|=2|k_1-k_2|\pi, k_1\neq k_2$ 且 $k_1, k_2\in\mathbf{Z}$,

故当 $|k_1-k_2|=1$ 时, $|A-B|$ 有最小值 2π.

故 B 正确.

8. D 【**解析**】因为 $y=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{4}\right]$,

因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x)=-f(-x)$,

所以 $\sqrt{2}\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{4}\right]=-\sqrt{2}\sin\left[2(-x-\varphi)+\frac{\pi}{4}\right]$,

即 $\sin\left(2x-2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(-2x-2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $2\varphi-\frac{\pi}{4}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 且 $\varphi>0$,

所以 $\varphi=\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{8}, k\in\mathbf{Z}$, 且 $\varphi>0$,

所以 φ 的最小值为 $\frac{\pi}{8}$, **故 D 正确.**

9. ABD 【**解析**】$f(x-2\pi)=\sin(3x-6\pi)-\sin(2x-4\pi)=\sin 3x-\sin 2x=f(x)$, **故 A 正确;**

$f(2\pi-x)=\sin(6\pi-3x)-\sin(4\pi-2x)=-\sin 3x+\sin 2x=-f(x)$, **故 B 正确;**

若 $f(x)$ 的最大值为 2, 则 $\sin 3x=1$, $\sin 2x=-1$, 当 $3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$ 时, $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$, 此时 $\sin 2x\neq-1$, **故 C 不正确;**

$f(x)=\sin 3x-\sin 2x=2\cos\frac{5}{2}x\sin\frac{1}{2}x$,

令 $f(x)=0$ 得 $\cos\frac{5}{2}x\sin\frac{1}{2}x=0$, 所以 $\sin\frac{1}{2}x=0$ 或 $\cos\frac{5}{2}x=0$, 又 $x\in(0, 2\pi)$, $\frac{1}{2}x\in(0,\pi)$, 所以 $\frac{5}{2}x\in(0,5\pi)$,

所以 $\sin\frac{1}{2}x\neq 0$, $\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{5}{2}x=\frac{3\pi}{2}$ 或 $\frac{5}{2}x=\frac{5\pi}{2}$ 或 $\frac{5}{2}x=\frac{7\pi}{2}$ 或 $\frac{5}{2}x=\frac{9\pi}{2}$,

解得 $x=\frac{\pi}{5}$ 或 $x=\frac{3\pi}{5}$ 或 $x=\pi$ 或 $x=\frac{7\pi}{5}$ 或 $x=\frac{9\pi}{5}$，即 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的所有零点之和为 5π，**故 D 正确.**

10. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】不妨取 $f(x_1)>f(x_2)$，

即 $f(x_1)-f(x_2)=1$，则 $f(x_1)\geqslant 0$，

当 x_1,x_2 的取值在 $f(x)$ 的同一单调区间内时，$|x_1-x_2|$ 有最小值，

不妨取 $2x_1+\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$2x_2+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

故 $\sin\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(x_1+x_2+\frac{\pi}{3}\right)\sin(x_1-x_2)=1$，

$x_1-x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，又函数 $y=\sin x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

故 $\sin(x_1-x_2)$ 最小时，$|x_1-x_2|$ 最小，

因为 $\cos\left(x_1+x_2+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant\sin(x_1-x_2)\leqslant 1$，

故 $\frac{\pi}{6}\leqslant|x_1-x_2|\leqslant\frac{\pi}{2}$，

当 $x_1=-\frac{\pi}{12}$，$x_2=-\frac{\pi}{4}$ 时，左式等号成立，

即 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

能力上分

1. C 【解析】因为 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=\sqrt{3}\cos\frac{A-B}{2}\leqslant\sqrt{3}$，

当且仅当 $A=B=60°$ 时，等号成立，

所以 $\sin A+\sin B$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

故 C 正确.

2. A 【解析】设 $t=\sin x-\cos x$，根据辅助角公式，得 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

由 $t^2=\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x$，得 $2\sin x\cos x=1-t^2$，

故 $y=t+1-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$，当 $t=\frac{1}{2}$

时,y 取得最大值 $\frac{5}{4}$. **故 A 正确.**

3. D　【解析】$\sqrt{3}\times\frac{2\cos 10°-\cos 70°}{\cos 20°}-\sin 90°$

$=\sqrt{3}\times\frac{2\cos 10°-\cos(60°+10°)}{\cos 20°}-1$

$=\sqrt{3}\times\frac{2\cos 10°-(\cos 60°\cos 10°-\sin 60°\sin 10°)}{\cos 20°}-1$

$=\sqrt{3}\times\frac{\frac{3}{2}\cos 10°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°}{\cos 20°}-1$

$=3\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 10°+\frac{1}{2}\sin 10°}{\cos 20°}-1$

$=3\times\frac{\cos(30°-10°)}{\cos 20°}-1=2.$

故选 D.

4. C　【解析】由和差化积公式得到 $\sin\alpha+\sin 3\alpha=2\sin 2\alpha\cos\alpha$,

所以 $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)$.

因为 $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=0$,

所以 $\sin 2\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,

当 $\sin 2\alpha=0$ 时,$2\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\alpha=\frac{1}{2}k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

因为 $\alpha\in[0,2\pi]$,所以 $\alpha=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ 或 2π;

当 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ 时,因为 $\alpha\in[0,2\pi]$,所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$.

所以符合题意的 α 共有 7 个,**故 C 正确.**

一题多解　$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

$=\sin(2\alpha-\alpha)+\sin 2\alpha+\sin(2\alpha+\alpha)$

$=\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha$

$=\sin 2\alpha\cdot(2\cos\alpha+1)=0$,

故 $\sin 2\alpha=0$ 或 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$.

当 $\sin 2\alpha=0$ 时,$2\alpha=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,即 $\alpha=\frac{1}{2}k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

因为 $\alpha\in[0,2\pi]$，所以 $\alpha=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$或 2π；

当 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$时，因为 $\alpha\in[0,2\pi]$，所以 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$或$\frac{4\pi}{3}$.

所以符合题意的 α 共有 7 个，**故 C 正确.**

5. B 【解析】根据正弦函数的性质可知，

$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\omega x+\frac{5\pi}{12}\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}-\omega x\right)\right]$

$=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{12}-\omega x\right)$

$=\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{\pi}{4}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{4}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的值域为 $[-\sqrt{2},2]$，

所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}\omega-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$，

所以$\frac{3}{2}\leqslant\omega\leqslant 3$，**故 B 正确.**

6. AB 【解析】$\because\{\sin\theta,\sin 2\theta,\sin 3\theta\}=\{\cos\theta,\cos 2\theta,\cos 3\theta\}$，

$\therefore\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta$.

由和差化积公式得 $\sin\theta+\sin 3\theta=2\sin\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2}=2\sin 2\theta\cdot\cos(-\theta)=2\sin 2\theta\cos\theta$，

$\cos\theta+\cos 3\theta=2\cos\frac{\theta+3\theta}{2}\cos\frac{\theta-3\theta}{2}=2\cos 2\theta\cos(-\theta)=2\cos 2\theta\cos\theta$，

$\therefore\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=2\sin 2\theta\cdot\cos\theta+\sin 2\theta=\sin 2\theta(2\cos\theta+1)$，

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=2\cos 2\theta\cdot$

$\cos\theta+\cos 2\theta=\cos 2\theta(2\cos\theta+1)$,

$\therefore \sin 2\theta(2\cos\theta+1)=\cos 2\theta\cdot(2\cos\theta+1)$,$\therefore \sin 2\theta=\cos 2\theta$ 或 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$,

当 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ 时,$\theta=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$ 或 $\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

此时 $\cos\theta=\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$,不满足集合中元素的互异性,故舍去,

当 $\sin 2\theta=\cos 2\theta$ 时,$2\theta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,满足题意,

$\therefore \theta=\dfrac{(4k+1)\pi}{8}$,$k\in\mathbf{Z}$.

故选 AB.

7. $\dfrac{1}{3}$ 【解析】因为 $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\times\left[\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}+\alpha-\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}-\alpha+\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\times\left[\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos\pi\right]=\dfrac{1}{2}(\sin 2\alpha-1)=-\dfrac{1}{3}$,所以 $\sin 2\alpha=\dfrac{1}{3}$.

8. 【解】$\sin(130°+\alpha)=\sin[150°+(\alpha-20°)]=\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-20°)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha-20°)$,

$2\cos 20°\cos\alpha=\cos(\alpha+20°)+\cos(\alpha-20°)$,

因为 $\sin(130°+\alpha)=2\cos 20°\cdot\cos\alpha$,

所以 $\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-20°)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha-20°)=\cos(\alpha+20°)+\cos(\alpha-20°)$,

所以 $-\dfrac{1}{2}\cos(\alpha-20°)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha-20°)=\cos(\alpha+20°)$,

即 $\cos[120°+(\alpha-20°)]=\cos(\alpha+20°)$,

即 $\cos(100°+\alpha)=\cos(\alpha+20°)$,

所以 $100°+\alpha=\alpha+20°+k\cdot 360°$,$k\in\mathbf{Z}$ 或 $100°+\alpha+\alpha+20°=k\cdot 360°$,$k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\alpha=-60°+k\cdot 180°$,$k\in\mathbf{Z}$,

故 $\tan\alpha=\tan(-60°+k\cdot 180°)=-\sqrt{3}$,

所以 $\tan(\alpha+45°)=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$.

9.【解】(1)由题意,函数 $f(x)=\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x=2\left(\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega x\right)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$,

$\because f(x)$的最小正周期$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,且 $\omega>0$,$\therefore \omega=2$,$\therefore$ 函数$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]$,$k\in\mathbf{Z}$.

(2)令$f(x)\geqslant 1$,则 $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$,

即$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

解得$\frac{\pi}{4}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\because x\in(-\pi,\pi)$,

$\therefore$ 当 $k=-1$ 时,$x\in\left[-\frac{3\pi}{4},-\frac{5\pi}{12}\right]$;

当 $k=0$ 时,$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{12}\right]$,

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant-\frac{5\pi}{12}\text{或}\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}\right\}$.

§3　二倍角的三角函数公式

3.1　二倍角公式

对点上分

1. C

攻略上分 本题观察发现"降幂扩角"后,变成了易求的特殊角 30°,可利用二倍角公式或"降幂扩角"的结论求解,具体可见通法攻略 34.

【解析】由题意可得,$\sin^2 75°-\sin^2 15°=\sin^2(90°-15°)-\sin^2 15°=\cos^2 15°-\sin^2 15°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 C 正确.

一题多解 原式 $=\frac{1-\cos 150^\circ}{2}-\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. C 【解析】$\frac{\tan 37.5^\circ}{1-\tan^2 37.5^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{2\tan 37.5^\circ}{1-\tan^2 37.5^\circ}=\frac{1}{2}\tan 75^\circ=\frac{1}{2}\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{1}{2}\times\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1}{2}\times\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 C 正确.

3. D 【解析】$\cos 72^\circ\sin 54^\circ\cdot\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cos 72^\circ\cos 36^\circ$

$=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ\cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ}$

$=\frac{\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{4\sin 36^\circ}=\frac{\sin 144^\circ}{8\sin 36^\circ}$

$=\frac{\sin 36^\circ}{8\sin 36^\circ}=\frac{1}{8}$.

故 D 正确.

4. B 【解析】已知 $\tan\alpha=2$，则

$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha+1}=\frac{1-2^2}{2\times2+1}=-\frac{3}{5}$.

故 B 正确.

5. C 【解析】设 $\beta=\alpha+\frac{\pi}{6}$，则 $\alpha=\beta-\frac{\pi}{6}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，

$\therefore\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2\beta$，

可得 $-\cos 2\beta=-(1-2\sin^2\beta)=2\sin^2\beta-1=2\times\frac{16}{25}-1=\frac{7}{25}$. 故 C 正确.

6. B 【解析】$5\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)$

$=-5\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-5\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot$

$\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{5}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{5}{2}(1-\sin 2\alpha)=1$,

解得 $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$，**故选 B.**

7. A 【解析】$\because \sqrt{6}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{6}\times\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{3}(1+\tan\alpha)}{1-\tan\alpha}\times(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{3}(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}\times(\cos\alpha-\sin\alpha)=\sqrt{3}(\cos\alpha+\sin\alpha)=1$,

$\therefore 3(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=3(1+\sin 2\alpha)=1$,

$\sin 2\alpha=-\frac{2}{3}$. **故 A 正确.**

8. $\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$ 【解析】实数 x 满足 $\cos 2x+\sin x=1$,

则 $1-2\sin^2x+\sin x=1$,

即 $\sin x=0$ 或 $\sin x=\frac{1}{2}$,

又 $x\in(0,\pi)$，则 $\sin x=\frac{1}{2}$,

$x=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$.

9. C 【解析】$\because \sin\theta,\cos\theta$ 是方程 $x^2-2x\sin\alpha+\sin^2\beta=0$ 的两个实根,

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=2\sin\alpha$,

$\sin^2\theta-2\sin\alpha\cdot\sin\theta+\sin^2\beta=0$①,

$\cos^2\theta-2\sin\alpha\cdot\cos\theta+\sin^2\beta=0$②,

①+②得 $1-2\sin\alpha\cdot(\sin\theta+\cos\theta)+2\sin^2\beta=0$,

即 $1-4\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=0$,

$2-4\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta$,

$\therefore 2\cos 2\alpha=\cos 2\beta$，得$\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}=2$.

故 C 正确.

10. CD 【解析】$f(x)=\sin^2x+\sin x\cdot\cos x+\frac{1}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

函数 $f(x)$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，**故 A 错误;**

因为$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right)+1=1$，所以图象 C 不关于点$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$中心对称，**故 B 错误**；

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以函数 $f(x)$ 在$\left(-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$上单调递增，**故 C 正确**；

将函数 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1$ 的图象，再将图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度可得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+1$ 的图象，**故 D 正确.**

能力上分

1. ACD　【解析】$\sin 75°\cos 15°+\cos 75°\sin 15°=\sin 90°=1$，**故 A 正确**；

$\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，**故 B 错误**；

$\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，**故 C 正确**；

$\frac{\sin 45°}{1+\cos 45°}=\frac{2\sin 22.5°\cos 22.5°}{2\cos^2 22.5°}=\tan 22.5°$，**故 D 正确.**

2. C　【解析】$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)-4\sin^2\alpha=-2$，

则$-\sin 2\alpha-4\sin^2\alpha=-2$，

即$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2$，

显然 $\cos\alpha\neq0$，则$\frac{2\tan\alpha+4\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=2$，

则 $\tan\alpha=1-\tan^2\alpha$，

故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{\tan\alpha}=2.$

故 C 正确.

3. B　【解析】因为 $f(x)=A\sin^2(\omega x+\varphi)+1=\frac{A}{2}+1-\frac{A}{2}\cos(2\omega x+2\varphi)$，

所以 $f(x)_{\max}=A+1$，$f(x)_{\min}=1$，所以 $A+1-1=2$，所以 $A=2$.

由题知$f(x)$的最小正周期$T=4=\frac{2\pi}{2\omega}$,所以$\omega=\frac{\pi}{4}$,所以$f(x)=2-\cos\left(\frac{\pi}{2}x+2\varphi\right)$,

又$f(0)=2$,所以$\cos 2\varphi=0$,所以$2\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\varphi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

因为$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$,所以$f(x)=2-\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=2+\sin\frac{\pi}{2}x$,

故$f(2\ 022)=2+\sin 1\ 011\pi=2$. **故 B 正确.**

4. B　【解析】函数$f(x)=1-2\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$,

由$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,得$2\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$,

要使函数$f(x)=1-2\sin^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上有且仅有两个零点,

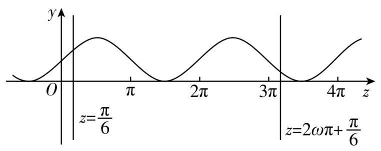
则$\pi\omega+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$,解得$\frac{7}{6}<\omega\leqslant\frac{13}{6}$,

即ω的取值范围是$\left(\frac{7}{6},\frac{13}{6}\right]$. **故 B 正确.**

5. C　【解析】由$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\cos^2\omega x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

设$z=2\omega x+\frac{\pi}{6}$,由$x\in[0,\pi]$,可得$z\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$,

如图,作出函数$y=\sin z+1$的大致图象.



由图可知,要使函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上只有一个零点和两个最大值点,

需使 $\frac{5\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi+\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{2}$,解得 $\frac{7}{6}\leqslant\omega<\frac{5}{3}$. **故 C 正确.**

6.【解】(1)$\because\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{9}{13}$, $\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{3}$, $\therefore\ \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$

$$\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan(\alpha+\beta)\cdot\tan\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$\frac{\frac{9}{13}+\frac{1}{3}}{1-\frac{9}{13}\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3},$$ 则 $\tan\alpha=$

$$\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$\frac{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=$$

$$\frac{\frac{4}{3}-1}{1+\frac{4}{3}\times 1}=\frac{1}{7}.$$

(2)$\because\ \cos\gamma=\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\therefore\ \cos 2\gamma=2\cos^2\gamma-1=2\times\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2-1=\frac{4}{5}$,又$\because\ \gamma$ 为锐角,

$\therefore\ 0<2\gamma<\pi$,则 $\sin 2\gamma=\sqrt{1-\cos^2 2\gamma}=\frac{3}{5}$,

$\therefore\ \tan 2\gamma=\frac{\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma}=\frac{3}{4}$, $\therefore\ \tan(\alpha+2\gamma)=$

$$\frac{\tan\alpha+\tan 2\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan 2\gamma}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=1.$$

$\because\ \tan 2\gamma=\frac{3}{4}>0$, $\therefore\ 0<2\gamma<\frac{\pi}{2}$,又$\because\ \alpha$ 为锐角,$\therefore\ 0<\alpha+2\gamma<\pi$,则 $\alpha+2\gamma=\frac{\pi}{4}$.

7.【解】(1)由题意知,$f(x)=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$

$=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-1.$

由 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

即 $f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.

(2)由题意知，$g(x)=2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x-2\cos^2 x+\sin x-\cos x+2\cos^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin x-\cos x$.

设 $t=\sin x-\cos x$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

由 $t^2=(\sin x-\cos x)^2=1-2\sin x\cos x$，得 $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(1-t^2)$，

所以 $y=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin x-\cos x=\sqrt{3}(1-t^2)+t=-\sqrt{3}t^2+t+\sqrt{3},t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

又函数 $y=-\sqrt{3}t^2+t+\sqrt{3}$ 的图象开口向下，

且其图象的对称轴为直线 $t=\frac{\sqrt{3}}{6}$，在 $\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\sqrt{2}\right)$ 上单调递减，

所以 $y_{\max}=-\sqrt{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3}=\frac{13\sqrt{3}}{12}$，即 $g(x)$ 的最大值为 $\frac{13\sqrt{3}}{12}$.

3.2 半角公式

对点上分

1. A 【解析】α 为第三象限角，

且 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

得 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{-\frac{3}{5}}=-3$. 故 A 正确.

2. B 【解析】$\because\sin 100°=a$，

$\therefore\cos 190°=\cos(90°+100°)=$

$-\sin 100°=-a$，

$\therefore \sin 95°=\sqrt{\dfrac{1-\cos 190°}{2}}=\sqrt{\dfrac{1+a}{2}}$，

故 B 正确.

3. D 【解析】$f(x)=\sin^2 2x=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$，故最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x)=\dfrac{1-\cos 4x}{2}$的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\dfrac{1-\cos(-4x)}{2}=\dfrac{1-\cos 4x}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，**故 D 正确.**

4. B 【解析】$\sin A-\sin B=2\sin A\cdot\sin^2\dfrac{C}{2}=2\sin A\cdot\dfrac{1-\cos C}{2}=\sin A-\sin A\cos C$，

整理得 $\sin B=\sin A\cos C$，

其中 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin A\cos C$，

故 $\cos A\sin C=0$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，故 $\cos A=0$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{2}$，

$\triangle ABC$ 的形状为直角三角形. **故 B 正确.**

5. C 【解析】已知 $\angle COB=\theta$，则 $\angle CBO=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$，$\angle BCH=\dfrac{\theta}{2}$，

又 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{BH}{CH}$，$\sin\theta=\dfrac{CH}{OC}$，$\cos\theta=\dfrac{OH}{OC}$，

$BH+OH=OB=OC$，

因此 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{BH}{CH}=\dfrac{1-\dfrac{OH}{OC}}{\dfrac{CH}{OC}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，**故 C 正确.**

6. $\dfrac{3}{2}$ 【解析】$f(x)=3\sin\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{4}+\sqrt{3}\sin^2\dfrac{x}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1-\cos\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m=\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)+m$，

$\because -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore -\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{6}$,

令 $z=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}$，则函数 $y=\sqrt{3}\sin z$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{3}{2}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值为 $-\frac{3}{2}+m$，令 $-\frac{3}{2}+m\geqslant 0$，解得 $m\geqslant\frac{3}{2}$,

则实数 m 的最小值是 $\frac{3}{2}$.

7.【解】(1) $f(x)=4\times\frac{1+\cos x}{2}\times(-\sin x)+\sin 2x+2\sqrt{3}\cos x=-2\sin x(1+\cos x)+\sin 2x+2\sqrt{3}\cos x=-2\sin x+2\sqrt{3}\cos x=-4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T=2\pi$.

(2) $\because -\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{2\pi}{3}$,

$\therefore -\frac{5\pi}{6}\leqslant x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$,

$\therefore -1\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore -2\sqrt{3}<-4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 4$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上的值域为 $(-2\sqrt{3},4]$,

当 $f(x)=4$ 时，$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

$\therefore x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=2k\pi-\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$,

又 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore x=-\frac{\pi}{6}$.

§3 节测上分

1. A【解析】$\frac{2\cos 65^\circ\cos 15^\circ}{\tan 15^\circ\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}$

$=\frac{2\cos 65^\circ\cos^2 15^\circ}{\sin 15^\circ\cos 10^\circ+\sin 10^\circ\cos 15^\circ}$

$=\frac{\sin 25^\circ\times(1+\cos 30^\circ)}{\sin 25^\circ}$

$=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$. 故 A 正确.

2. D【解析】因为 $\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$

$\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=-\frac{4}{5}$,

所以 $1+\tan^2\alpha=-\frac{5}{2}\tan\alpha$,

所以 $\frac{\tan 2\alpha}{\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=$

$\frac{2\tan\alpha}{(1+\tan\alpha)^2}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha}=-4.$

故 D 正确.

3. D 【解析】因为 $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$, 令

$t=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}$, 则 $\alpha=2t-\frac{\pi}{6}$, $\sin t=\frac{1}{4}$,

所以 $\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos(2t-\pi)=-\cos 2t=-(1-2\sin^2 t)=2\sin^2 t-1=2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}$.

故 D 正确.

4. A 【解析】因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$,

所以 $\cos\frac{\alpha}{2}>\sin\frac{\alpha}{2}>0$,

所以 $\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)}}$

$=\sqrt{\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$

$=\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$

$=\frac{\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\cos\alpha+1}{2}}{\frac{\cos\alpha-1}{2}+\frac{1}{2}\sin\alpha}=4\sqrt{2}+1$,

所以 $\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\cdot(4\sqrt{2}+1)-\frac{1}{2}\cdot(4\sqrt{2}+1)$,

即 $2\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=2\sqrt{2}+1$,

所以 $\sin\alpha+\cos\alpha=1+\frac{\sqrt{2}}{4}$,

即 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1+$

$\sin 2\alpha=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$,

所以 $\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}+1}{8}$,**故 A 正确.**

5. C 【解析】$f(x)=\sin \omega x\cos \omega x-\sin^2\omega x=\frac{1}{2}\sin 2\omega x-\frac{1-\cos 2\omega x}{2}=\frac{1}{2}(\sin 2\omega x+\cos 2\omega x)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$. 由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2\omega x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,整理得 $\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{8\omega}(k\in\mathbf{Z})$. 因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ 上单调递减,故 $\begin{cases}\pi\leqslant\frac{k\pi}{\omega}+\frac{5\pi}{8\omega},\\ \frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{8\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 且 $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{2\omega}\geqslant\frac{\pi}{2}$,整理得 $\omega\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{8}\right]$. **故 C 正确.**

6. B 【解析】因为 $\tan(\alpha+\beta)$,$\tan(\alpha-\beta)$ 是函数 $f(x)=x^2-6x+4$ 的零点,

所以 $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=6$,

$\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)=4$,

所以 $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{4\sin^2\beta-2}=\frac{\sin 2\alpha}{-2\cos 2\beta}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]}{\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{6}{1+4}=-\frac{3}{5}$. **故 B 正确.**

7. BD 【解析】依题意,$f(x)=\sin 2\omega x+\sqrt{3}\cos 2\omega x=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,

由题图知 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$f(x)$ 取最大值,

则 $2\omega\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=3k+\frac{1}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,

又 $0<\omega<1$,所以 $\omega=\frac{1}{4}$,$f(x)=$

$2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$，$f(x)$ 的最小正周期为 4π，**故 A 错误**；

$y=2f\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\left[\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=4\cos x$ 是偶函数，**故 B 正确**；

$y=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象关于直线 $x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$ 对称，**故 C 错误**；

$f(tx)=2\sin\left(\frac{tx}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$，$t>0$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\frac{tx}{2}+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{3}\right]$，

依题意，$2\pi\leqslant\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{3}<3\pi$，解得 $t\in\left[\frac{10}{3},\frac{16}{3}\right)$，**故 D 正确**.

8.【解】(1) $f(x)=2\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x-1=1-\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x-1=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$.

当 $\omega=1$ 时，$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

$\therefore f\left(\frac{5\pi}{24}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2) 由(1)知 $f(x)=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore f\left(x+\frac{\varphi}{2\omega}\right)=2\sin\left(2\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，$\because$ 函数 $f\left(x+\frac{\varphi}{2\omega}\right)$ 为偶函数，$\therefore \varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore \cos\varphi=\pm\frac{1}{2}$.

(3) $\because f(x)$ 的图象的两条对称轴间的最小距离小于 3π，

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T<6\pi$，即 $\frac{2\pi}{2\omega}<6\pi$，

即 $\omega>\frac{1}{6}$.

故函数 $y=2\omega x-\frac{\pi}{6}$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$-\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<2\omega x-$

$\frac{\pi}{6}<\omega\pi-\frac{\pi}{6}$.

又 $\omega>\frac{1}{6}$，∴ $\omega\pi-\frac{\pi}{6}>0$. ∴ $-\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<0<\omega\pi-\frac{\pi}{6}$，故需满足 $\begin{cases}-\frac{2\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \omega\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$

解得 $\omega\leqslant\frac{1}{2}$.

∴ ω 的取值范围为 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$.

专题上分 6　三角恒等变换的“四变”策略

1. D

攻略上分 本题先利用角的代换得到新的角度关系，再利用两角差的正切公式展开，结合换元及基本不等式求得最值，更多化简方法及技巧见大招攻略 36.

【解析】因为 $\alpha+\beta=2\alpha-(\alpha-\beta)$，所以 $\tan(\alpha+\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha-\beta)]=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha-\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha-\beta)}=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1+3\tan^2(\alpha-\beta)}$，所以要使 $\tan(\alpha+\beta)$ 取最大值，则 $\tan(\alpha-\beta)>0$，

故可设 $\tan(\alpha-\beta)=t\ (t>0)$，则 $\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1+3\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{2t}{1+3t^2}=\frac{2}{\frac{1}{t}+3t}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{t}\times3t}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\begin{cases}\frac{1}{t}=3t,\\ t>0,\end{cases}$ 即 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，等号成立.

故选 D.

2. D　【解析】因为 $0<\alpha<\pi$，$\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\tan\alpha=-\frac{1}{7}$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

因为 $0<\beta<\pi$，所以 $-\pi<-\beta<0$，

所以$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$.

因为$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}>0$,所以$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

所以$\tan[2(\alpha-\beta)]=\frac{2\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan^2(\alpha-\beta)}=\frac{3}{4}$,

则$\tan(\alpha-2\beta)=\tan[2(\alpha-\beta)-\alpha]=\frac{\tan[2(\alpha-\beta)]-\tan\alpha}{1+\tan[2(\alpha-\beta)]\tan\alpha}=1$,

故$\alpha-2\beta=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

因为$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,所以$0<2(\alpha-\beta)<\pi$.

因为$\tan[2(\alpha-\beta)]=\frac{3}{4}>0$,

所以$0<2(\alpha-\beta)<\frac{\pi}{2}$.

因为$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$,所以$-\pi<-\alpha<-\frac{\pi}{2}$,

所以$-\pi<\alpha-2\beta<0$,

所以$\alpha-2\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

故选 D.

3. B 【解析】因为α,β均为锐角,即$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,所以$\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,$-\frac{\alpha}{2}+\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,

又$\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$,$\sin\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

所以$\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,$\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

所以$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)+\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right]=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2}+\beta\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选 B.

4. B 【解析】由$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha=\frac{2}{3}$,可

得$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{2}{3}$,

即$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\frac{2}{3}$,所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$,所以$\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=2\times\frac{4}{9}-1=-\frac{1}{9}$.

5. $\frac{7}{8}$ 【解析】由$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$,得$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$,两边同时平方可得$\frac{1+2\cos\alpha\sin\alpha}{1-2\cos\alpha\sin\alpha}=3$,故$\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}$,$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{8}$.

6. A 【解析】$a=\frac{1+\tan 18°}{1-\tan 18°}=\tan(45°+18°)=\tan 63°>\tan 60°=\sqrt{3}$,

$b=2\cos^2 33°-1=\cos 66°=\sin 24°$,

$c=\sqrt{\frac{1-\cos 56°}{2}}=\sqrt{\sin^2 28°}=\sin 28°$,

又$y=\sin x$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增,所以$\sin 24°<\sin 28°<\sin 30°=\frac{1}{2}$,即$b<c<\frac{1}{2}$,所以$a>c>b$. **故选** A.

7. C 【解析】由$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$,

得$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$,

又$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{12}$,

所以$\cos\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$,

所以$\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}$

$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}$

$=\frac{1}{2}\{\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]+\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]\}$

$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{12}\right)\times\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{6}$.

故选 C.

8. $\frac{2}{5}$ 【解析】$\because\cos\theta=-\frac{3}{5}$, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\therefore\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=$

$\frac{1-\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{1+\frac{3}{5}}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=$

$\frac{2}{5}$.

9. B 【解析】因为 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $P\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$,

所以$\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos(2\pi+\alpha)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$

$=\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{-\tan\alpha+1}{2+\tan\alpha}$

$=\frac{-\frac{1}{2}+1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$.

故选 B.

10. A 【解析】因为 $\tan\alpha=3$,

所以 $\frac{\cos^3\alpha-\cos\alpha}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\alpha(\cos^2\alpha-1)}{-\sin\alpha}=$

$\frac{-\sin^2\alpha\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=$

$\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{3}{10}$. 故选 A.

11. A 【解析】因为 $\tan\theta=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{-\frac{5}{3}-1}{1+\left(-\frac{5}{3}\right)}=4$,

所以$\sqrt{\frac{1+2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}{1-2\sin 2\theta+3\cos^2\theta}}$

$=\sqrt{\frac{\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}{\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta+4\cos^2\theta}}$

$=\left|\frac{\sin\theta+2\cos\theta}{\sin\theta-2\cos\theta}\right|$

$=\left|\dfrac{\tan\theta+2}{\tan\theta-2}\right|=3.$

故选 A.

专题上分 7　三角恒等变换与三角函数、解三角形的综合问题

1. A　【解析】对于 A，$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，最小正周期 $T=2\pi$，故 A 正确；

对于 B，$f(x)=\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$，最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 B 错误；

对于 C，$f(x)=\sin^2x+\cos^2x=1$，是常函数，不存在最小正周期，故 C 错误；

对于 D，$f(x)=\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x$，最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故 D 错误.

2. C　【解析】$f(x)=4(\cos^2x-\sin^2x)\cdot(\cos^2x+\sin^2x)+1=4\cos 2x+1$，由 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=4\cos(-2x)+1=4\cos 2x+1=f(x)$，且最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，可得 $f(x)$ 是最小正周期为 π 的偶函数.

故选 C.

3. D　【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\dfrac{1}{2}\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\dfrac{1}{2}\cos 2\omega x=\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$2\omega x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},4\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$，

又函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 上恰有 3 个极大值点，

故 $\dfrac{9\pi}{2}<4\omega\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{13\pi}{2}$，解得 $\omega\in\left(\dfrac{13}{12},\dfrac{19}{12}\right]$.

故选 D.

4. A　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)=b\sin A$，

由正弦定理得 $\sin A\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin B\sin A$,

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $\sin A>0$,

所以 $\cos\left(B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin B$,

即$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B=\sin B$,

得 $\cos B=\sqrt{3}\sin B$,显然 $\cos B\neq 0$,故 $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $0<B<\pi$,所以 $B=\frac{\pi}{6}$,而 $a=\sqrt{3}$,$c=2$,

由余弦定理得 $b=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos B}=\sqrt{3+4-4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$. **故选 A.**

5. BCD　【解析】对于 A,由 $f(x)=\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,得最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,**故 A 错误;**

对于 B,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$,即点$\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$是 $f(x)$图象的对称中心,**故 B 正确;**

对于 C,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时,$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$,显然 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,**故 C 正确;**

对于 D,由题意得 $2x_0-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,则 $2x_0=k\pi+\frac{5\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $\cos 2x_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,**故 D 正确.**

6. BC　【解析】由题意,$f(x)=\sqrt{3}\cdot\sin\frac{2}{3}x\cdot\cos\frac{2}{3}x-\cos^2\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{4}{3}x-\frac{1}{2}\cos\frac{4}{3}x=\sin\left(\frac{4}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$,

$g(x)=\sin\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[\left(\frac{4}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)-\right.$

$\left.\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left(\frac{4}{3}x+\frac{2\pi}{3}\right)$，**故 A 错误；**

$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，

故 B 正确；

由 $g\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left[\frac{4}{3}\times\left(-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin 0=0$，**故 C 正确；**

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{4}{3}x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\frac{3k\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=0$ 时，$g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$，**故 D 错误.**

7. AB　【解析】对于 A，若 $A>B$，根据大角对大边可得 $a>b$，**故 A 正确；**

对于 B，因为 $\sin A>\sin B$，由正弦定理可得 $a>b$，所以 $A>B$，又 $y=\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，所以 $\cos A<\cos B$，**故 B 正确；**

对于 C，若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$，所以 $a^2+b^2>c^2$，**故 C 错误；**

对于 D，若 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，则 $\sin 2A=\sin 2B$，又 $A,B\in(0,\pi)$，$A+B\in(0,\pi)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A=\pi-2B$，所以 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形，**故 D 错误.**

8. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$　【解析】由 $\sin^2B=\sin^2\frac{A+C}{2}$，可得 $\sin^2B=\sin^2\left(\frac{\pi-B}{2}\right)=\cos^2\frac{B}{2}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，易知 $\sin B>0$，$\cos\frac{B}{2}>0$，所以 $\sin B=\cos\frac{B}{2}$，

所以 $2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{B}{2}$，

所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$，故 $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，

即 $B=\frac{\pi}{3}$，即 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}=a^2+c^2-ac=3$.

因为 E 是 AC 的中点，所以 $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，

所以 $\overrightarrow{BE}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2)=\frac{1}{4}(c^2+2ca\cos\angle ABC+a^2)=\frac{1}{4}(c^2+ca+a^2)=\frac{1}{4}(3+2ca)$.

由正弦定理可得 $ac=\frac{b}{\sin\angle ABC}\cdot\sin A\cdot\frac{b}{\sin\angle ABC}\cdot\sin C=4\sin A\sin C=4\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$，

所以 $ac=2\sqrt{3}\sin A\cos A+2\sin^2A=\sqrt{3}\sin 2A-\cos 2A+1=2\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)+1$，

因为 $A\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{1}{2},1\right]$，

所以 $ac\in(0,3]$，所以 $\overrightarrow{BE}^2=\frac{1}{4}(3+2ca)\in\left(\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right]$，

所以 $BE\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right]$.

9. $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle B$，

因为 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}(AC^2-AB^2-BC^2)=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle B$，

所以 $-\sqrt{3}\cos\angle B=\sin\angle B$，

显然 $\cos\angle B\neq0$，故 $\tan\angle B=-\sqrt{3}$，

又因为 $0°<\angle B<180°$，所以 $\angle B=120°$.

设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\angle ACD=120°-\alpha$，$\angle D=30°+\alpha$，$\angle CAB=60°-\alpha$，

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle D}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle B}$，

两式作商，得 $\sin(60°-\alpha)\cdot\sin(30°+$

$\alpha)=\cos(30°+\alpha)\sin(30°+\alpha)=\frac{1}{4}$,

即 $\sin(60°+2\alpha)=\frac{1}{2}$,

因为 $0°<\alpha<60°$,

所以 $60°+2\alpha=150°$,所以 $\alpha=45°$,

$S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BC\sin 45°$, $S_2=\frac{1}{2}AC\cdot DC\sin(120°-45°)$,

若 $S_1=\lambda S_2$,则 $\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\lambda\cdot\frac{1}{2}AC\cdot DC\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

解得 $\lambda=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

10.【解】(1) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\omega x\right)\cdot\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi$

$=\sin 2\omega x\cos\varphi+\cos 2\omega x\sin\varphi$

$=\sin(2\omega x+\varphi)$,

若 $T=2\pi$,则 $\frac{2\pi}{2\omega}=2\pi$,解得 $\omega=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)知,函数 $f(x)$ 的最小值为 -1.

若选条件①:

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减,

所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,即 $T\geqslant\pi$,

又 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-1$,且点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 为函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

所以 $\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}=\frac{T}{4}$,即 $T=\frac{2\pi}{3}$,与 $T\geqslant\pi$ 相矛盾,故函数 $f(x)$ 不存在,条件①不符合要求.

若选条件②:

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减,$f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-1$,且函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{12}$,

所以 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{T}{2}$,即 $T=\pi$,

又 $T=\frac{2\pi}{2\omega}$,所以 $\omega=1$,

所以 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$,

由 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-1$ 知 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=-1$,即 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$,

所以 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

综上,$\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{3}$.

若选条件③:

因为 $f(T)=f(0)=\sin\varphi$,且 $f(T)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ 或 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$,

由 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-1$ 知 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(2\omega\cdot\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

即 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

所以 $\frac{7\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\omega=\frac{12k}{7}+1,k\in\mathbf{Z}$,

因为 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减,

所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$,即 $T\geqslant\pi$,

又 $T=\frac{2\pi}{2\omega}$,所以 $0<\omega\leqslant 1$,

取 $k=0$,则 $\omega=1$,

综上,$\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{3}$.

11.【解】(1)因为 $\sin B+\sin C=\sin(A-B)$,

所以 $\sin B+\sin(A+B)=\sin(A-B)$,

即 $\sin B+\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A\cos B-\cos A\sin B$,

所以 $\sin B+2\cos A\sin B=0$.

因为 $B\in(0,\pi)$,所以 $\sin B>0$,所

以 $\cos A=-\frac{1}{2}$,

因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2)①在△ABC 中,由余弦定理可得 $a=\sqrt{c^2+b^2-2cb\cos\angle BAC}=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$,

由正弦定理得圆 O 的直径为 $\frac{a}{\sin\angle BAC}=\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$,

又 D 为△ABC 的外接圆 O 的 $\overset{\frown}{BMC}$ 上一动点(含端点),$AC=1$,

所以 $1\leqslant AD\leqslant\frac{2\sqrt{21}}{3}$,所以 AD 的取值范围是 $\left[1,\frac{2\sqrt{21}}{3}\right]$.

②在△ABC 中,由正弦定理可得 $\frac{c}{\sin\angle ACB}=\frac{a}{\sin\angle BAC}$,

所以 $\sin\angle ACB=\frac{c\sin\angle BAC}{a}=\frac{2\sin\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

因为 D 在△ABC 外接圆 O 上,所以 $\angle ADB=\angle ACB$,

因为 $\angle ACB\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $\cos\angle ADB=\cos\angle ACB=\sqrt{1-\sin^2\angle ACB}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$,又 $AD=AB$,

所以 $BD=2AD\cos\angle ADB=2\times2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$.

真题上分

1. D 【解析】因为 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=-\frac{3}{5}$,

又 $0<\alpha<\pi$,所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$,

则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times$

$\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$. **故选** D.

一题多解　因为 $0<\alpha<\pi$，所以 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$，又因为 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$ $\Big($**另解：**$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\frac{2}{5}-1=-\frac{3}{5}$ 或 $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\frac{8}{5}=-\frac{3}{5}\Big)$.

所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选 D.

2. A　【解析】**解法一：**由 $\tan\alpha\tan\beta=2$，可得 $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=2$，即 $\sin\alpha\sin\beta=2\cos\alpha\cos\beta$.

由 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，可得 $\cos\alpha\cos\beta=-m$，$\sin\alpha\sin\beta=-2m$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-3m$，**故选** A.

解法二：由 $\cos(\alpha+\beta)=m$ 得，

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=m$，①

设 $\cos(\alpha-\beta)=n$，则 $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=n$，②

由 $\frac{①+②}{2}$ 可得，$\cos\alpha\cos\beta=\frac{m+n}{2}$，

由 $\frac{②-①}{2}$ 得 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{n-m}{2}$.

又 $\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{n-m}{m+n}=2$，

解得 $n=-3m$. **故选** A.

解法三（特殊值法）：令 $\alpha=\beta$，则 $\cos 2\alpha=m$，$\tan^2\alpha=2$. 根据二倍角的余弦公式可知，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=m$，解得 $\cos^2\alpha=\frac{1+m}{2}$，$\sin^2\alpha=$

$\frac{1-m}{2}$，所以 $\tan^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-m}{1+m}=2$，解得 $m=-\frac{1}{3}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos 0=1=-3m$. 故选 A.

3. B 【解析】$\because \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，$\therefore \tan\alpha=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}=2\sqrt{3}-1$，故选 B.

4. B

思路导引 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}\to\sin\alpha\cos\beta$ 的值 $\to\sin(\alpha+\beta)$ 的值 $\xrightarrow{\text{二倍角公式}}\cos(2\alpha+2\beta)$ 的值.

【解析】$\because \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，

$\therefore \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{3}+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，$\therefore \cos(2\alpha+2\beta)=\cos[2(\alpha+\beta)]=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$，故选 B.

5. $\frac{\pi}{2}$　$\frac{\pi}{2}$（答案不唯一） 【解析】由 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha-\beta)$，得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\Rightarrow\cos\alpha\sin\beta=0$①.

由 $\cos(\alpha+\beta)\neq\cos(\alpha-\beta)$，得 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\neq\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\Rightarrow\sin\alpha\sin\beta\neq0$②.

由①②得 $\sin\beta\neq0$，$\cos\alpha=0$，且 $\sin\alpha\neq0$，所以 α 可取 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，β 可取 $(0,2\pi)$ 内除 π 外的任意角.

6. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】$\because \tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，$\therefore \tan(\alpha+\beta)=$

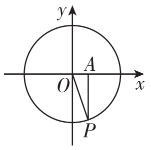
$\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{4}{-\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$.

$\because 2k_1\pi<\alpha<2k_1\pi+\dfrac{\pi}{2},k_1\in\mathbf{Z},2k_2\pi+\pi<\beta<2k_2\pi+\dfrac{3\pi}{2},k_2\in\mathbf{Z},\therefore 2(k_1+k_2)\pi+\pi<\alpha+\beta<2(k_1+k_2)\pi+2\pi,k_1,k_2\in\mathbf{Z},\therefore \sin(\alpha+\beta)<0$.

$\because\begin{cases}\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta),\\ \sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=1,\end{cases}\quad\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

一题多解 任意角的三角函数

由题可得,α 为第一象限角,β 为第三象限角,$\therefore\alpha+\beta$ 为第三象限角或第四象限角或 y 轴负半轴上,又 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-2\sqrt{2}$,$\therefore\alpha+\beta$ 为第四象限角.设角 $\alpha+\beta$ 的始边为 x 轴非负半轴,终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点为 P,则 $OP=1$,$|\tan(\alpha+\beta)|=\dfrac{PA}{OA}=2\sqrt{2}$,结合勾股定理解得 $PA=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,$OA=\dfrac{1}{3}$,$\therefore\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{PA}{OP}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.



易错警示 α,β 范围中的 k 并不一定相同,求 $\sin(\alpha+\beta)$,一定要求 $\alpha+\beta$ 的范围.

7. C 【解析】$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.$\because f(x+\pi)=f(x)$ 恒成立,

$\therefore\pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期,

提示: π 不一定是最小正周期

$\therefore\pi=\dfrac{m\cdot 2\pi}{\omega}(m\in\mathbf{N}^*)$,则 $\omega=2m(m\in\mathbf{N}^*)$.

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时,$2mx+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{m\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right]$.$\because f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上存在零点,$\therefore\dfrac{m\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\geqslant\pi$,即 $m\geqslant\dfrac{3}{2}$.又 $m\in\mathbf{N}^*$,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时,ω 取得最小值,最小值为 4,故选 C.

8. ABC 【解析】因为 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$,所以 $2\cos^2 A-1+2\cos^2 B-1+2\sin C=2$,即 $\cos^2 A+\cos^2 B+\sin C=2$,所以 $1-\sin^2 A+1-\sin^2 B+\sin C=2$,即 $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$,故 A 正确.

当 $C>\frac{\pi}{2}$ 时,$A+B<\frac{\pi}{2}$,即 $0<A<\frac{\pi}{2}-B<\frac{\pi}{2}$,故有 $0<\sin A<\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,即 $0<\sin A<\cos B$,同理有 $0<\sin B<\cos A$,所以 $\sin^2 A+\sin^2 B<\sin A\cos B+\sin B\cos A=\sin(A+B)=\sin C$,与 A 选项矛盾,故 $C>\frac{\pi}{2}$ 不成立,同理可得 $C<\frac{\pi}{2}$ 也不成立,故 $C=\frac{\pi}{2}$,则 $\sin C=1$,$\cos C=0$.

提示:根据 A 选项的结论及题干中已知,$\sin C$ 是比较特殊的,所以从角 C 入手解决问题

因为 $\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$,所以$\cos A\cos B=\frac{1}{4}$,因为 $A+B=\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos B=\sin A$,所以 $\cos A\sin A=\frac{1}{4}$,即 $\sin 2A=\frac{1}{2}$,又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$2A\in(0,\pi)$,故 $2A=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$,即 $A=\frac{\pi}{12}$或$\frac{5\pi}{12}$.

当 $A=\frac{\pi}{12}$时,$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{3}$,所以$\frac{BC}{AC}=2-\sqrt{3}$①.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{4}$,故 $AC\cdot BC=\frac{1}{2}$②,

结合①②可得$\begin{cases}AC^2=\frac{2+\sqrt{3}}{2},\\ BC^2=\frac{2-\sqrt{3}}{2},\end{cases}$所以 $AB^2=AC^2+BC^2=2$,则 $AB=\sqrt{2}$,故 B 正确,D 错误.

当 $A=\frac{\pi}{12}$时,$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,所以 $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,故 C 正确.

当 $A=\frac{5\pi}{12}$时，同理可得 B **正确**，C **正确**，D **错误**.

提示：B，D 选项都可以视为求斜边的长度，C 选项角 A，B 互余，$A=\frac{\pi}{12}$与 $A=\frac{5\pi}{12}$结果相同

故选 ABC.

9.【解】（1）已知 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，则有 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

又 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，所以 $\cos B=\frac{\sin C}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. 又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（2）由（1）可得 $C=\frac{\pi}{4}$，$B=\frac{\pi}{3}$，由正弦定理，不妨令 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=k(k>0)$，则有 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}k$.

又 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin(B+C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}k(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$，解得 $k=4$(负值舍去)，故 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k=2\sqrt{2}$.

一题多解

（2）由（1）可知，$B=\frac{\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{4}$，故 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

由正弦定理可得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $a=\frac{\sin A}{\sin C}\cdot c=\frac{1+\sqrt{3}}{2}c$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1+\sqrt{3}}{4}c^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2=3+\sqrt{3}$，

解得 $c=2\sqrt{2}$（负值舍去）$\Bigg($另解：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$可得，$a=\frac{\sin A}{\sin B}b=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}b$，所以$\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}b^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3+\sqrt{3}}{12}\cdot b^2=3+\sqrt{3}$，解得$b=2\sqrt{3}$（负值舍去），所以$a=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，则$c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2+(2\sqrt{3})^2-\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\times 2\sqrt{3}=8$，解得$c=2\sqrt{2}$（负值舍去）$\Bigg)$.

素养上分

1. D　【解析】由题意可知，“赵爽弦图”中的大、小正方形的边长分别为13，7，于是有 $13\sin\alpha-13\cos\alpha=7\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$，即有 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{7}{13}$，两边平方得 $1-\sin 2\alpha=\frac{49}{169}$，所以 $\sin 2\alpha=\frac{120}{169}$. **故选 D.**

2. B　【解析】由题得 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OB}=(\sqrt{3},-1)$，所以 $\cos(A,B)=\cos\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha}{1\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$，

由 $1-\cos(A,B)=1-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$，得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}$，所以 $\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=-\frac{1}{9}$. **故选 B.**

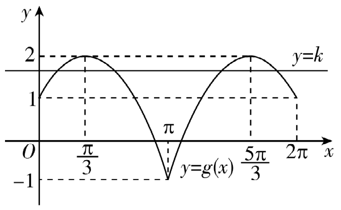
3. B　【解析】根据题意可得 $f(x)=\cos x$，所以 $g(x)=\cos x+\sqrt{3}|\sin x|$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$g(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$g(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin x=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $g(x)=\begin{cases}2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right), x\in[0,\pi],\\ -2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right), x\in(\pi,2\pi],\end{cases}$

画出函数 $g(x)$ 的图象如图所示：



易知当 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{3}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 2；当 $x=0$ 或 $x=2\pi$ 时，$g(x)=1$；当 $x=\pi$ 时，$g(x)$ 取得最小值 -1.

由图可知若直线 $y=k$ 与 $g(x)$ 的图象有且仅有四个不同的交点，则 $1\leqslant k<2$.

即实数 k 的取值范围为 $[1,2)$. **故选 B.**

4. $\left[-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2},1\right]$ 【解析】由题意可得，$F(x)=\sin x+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\sin(2x+\pi)=\sin x+\cos x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$，令 $\sin x+\cos x=t$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则 $1+\sin 2x=t^2$，

设 $h(t)=t-\dfrac{1}{2}(t^2-1)=-\dfrac{1}{2}t^2+t+\dfrac{1}{2}$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，结合二次函数的性质易得 $h(t)\in\left[-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2},1\right]$，即 $F(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2},1\right]$.

5. C 【解析】因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，$0\leqslant\cos x\leqslant 1$，

设 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}$，则 $y^2=\sin x+2\sqrt{\sin x\cdot\cos x}+\cos x$.

设 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$，

则 $t\in[1,\sqrt{2}]$，且 $\sin x\cdot\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

所以 $y^2=t+2\sqrt{\dfrac{t^2-1}{2}}=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$，$t\in[1,\sqrt{2}]$.

设 $g(t)=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$，易知在 $[1,\sqrt{2}]$ 上，$g(t)=t+\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}$ 单调递增，

又 $g(1)=1,g(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,

所以 $1\leqslant y^2\leqslant 2\sqrt{2}$,

又 $y\geqslant 0$,所以 $1\leqslant y\leqslant\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$.

故选 C.

6.【解】由题得,$3\cos\alpha+2\sin\alpha=c$,$3\cos\beta+2\sin\beta=c$,两式作差可得,

$3(\cos\alpha-\cos\beta)+2(\sin\alpha-\sin\beta)=0$,

即 $-6\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}+4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$,即 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-3\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$,

所以 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ 或 $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-3\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$,即 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ 或 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{3}$.

当 $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ 时,$\alpha-\beta=2m\pi,m\in\mathbf{Z}$,与题设 $\alpha-\beta\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 矛盾,舍去;

当 $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{2}{3}$ 时,$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{12}{5}$.

第四章　全章上分

1. A　【解析】因为 α 是三角形的内角,$\tan\alpha=2>0$,所以 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,由 $\tan\alpha=2$ 得 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$,则 $\sin\alpha=2\cos\alpha$.

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

所以 $4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 或 $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$(舍去). **故选 A.**

2. B　【解析】因为 $\tan\alpha=3$,

所以 $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}$

$=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

$=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha+1}{2}=2.$

故选 B.

3. C 【解析】依题意，$f(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，因此 $g(x)=f\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$. 故选 C.

4. C 【解析】由题意，设 $\beta=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，由 A 点的坐标并结合三角函数的定义得 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\cdot\sin\alpha=-\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$.

故选 C.

5. B 【解析】因为 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma$，

又 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)$，所以 $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\alpha\cdot\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)$.

因为 $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)-\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma=\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma=-\frac{1}{3}$.

故选 B.

6. A 【解析】由积化和差公式可得

$\cos 40°\cos 20°=\frac{1}{2}[\cos(40°-20°)+\cos(40°+20°)]=\frac{1}{2}\cdot(\cos 20°+\cos 60°)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 20°$，

故 $1+4\cos 20°\sin^2 50°$

$=1+4\cdot\cos 20°\cos 40°\cos 40°$

$=1+4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 20°\right)\cos 40°$

$=1+\cos 40°+2\cos 20°\cos 40°$

$=2\cos^2 20°+2\cos 20°\cos 40°$

$=2\cos 20°(\cos 20°+\cos 40°)$，

由和差化积公式可得

$\cos 20°+\cos 40°$

$=2\cos\dfrac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\dfrac{40^\circ-20^\circ}{2}$

$=2\cos 30^\circ\cos 10^\circ=\sqrt{3}\cos 10^\circ$,

故 $1+4\cos 20^\circ\sin^2 50^\circ=2\cos 20^\circ\cdot(\cos 20^\circ+\cos 40^\circ)=2\sqrt{3}\cos 10^\circ\cdot\cos 20^\circ$,

所以 $\dfrac{2\sin 80^\circ\cos 20^\circ}{1+4\cos 20^\circ\sin^2 50^\circ}=\dfrac{2\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{2\sqrt{3}\cos 10^\circ\cos 20^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 A.

7. D 【解析】令 $f(x)=5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0$, $0<x<2\pi$,则 $x=\dfrac{\pi}{6}$或 $x=\dfrac{7\pi}{6}$,

令 $f(x)=5\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=5$, $0<x<2\pi$,则 $x=\dfrac{2\pi}{3}$,

又 $0<\alpha<\beta<2\pi$, $f(\alpha)=f(\beta)=1$,

所以 $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}<\beta<\dfrac{7\pi}{6}$, $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{5}$, $\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{5}$.

因为 $0<\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta-\dfrac{\pi}{6}<\pi$,

所以 $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$,

$\cos(\beta-\alpha)=\cos\left[\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)-\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=\cos\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=-\dfrac{23}{25}$.

故选 D.

8. D 【解析】当 $x=0$ 或 $x=\dfrac{\pi}{2}$时,不等式恒成立,a 的取值范围为 $\mathbf{R}$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,由 $a\sin 2x\geqslant 2\sin\dfrac{x}{2}\sqrt{1-\sin x}$,可得 $2a\sin x\cos x\geqslant 2\sin\dfrac{x}{2}\sqrt{\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}$,

因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{x}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\frac{x}{2}<\cos\frac{x}{2}$，

可得 $2a\sin x\cos x\geqslant 2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$，

又因为 $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$，$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$，

所以 $4a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\geqslant 2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$，

即 $2a\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\geqslant 1$.

因为 $2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sin x+\cos x+1=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$，

且由 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，可得 $x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，

则 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1\in(2,\sqrt{2}+1]$，且 $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1},\frac{1}{2}\right)$.

因为不等式 $a\sin 2x\geqslant 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\sin x}$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1}$ 恒成立，所以 $a\geqslant\frac{1}{2}$. 综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$，**故选 D.**

9. AD 【解析】由 $\frac{\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=\frac{\tan x+1}{2\tan x-1}=1$，可得 $\tan x=2$，**故 A 正确；**

由 $\frac{\sin x}{\cos x}=2$，$\sin^2x+\cos^2x=1$，可得 $\sin x=$

$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$，**故 B 错误；**

$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$，**故 C 错误；**

由$\frac{\sin x}{\cos x}=2$，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 可得 $\sin^2 x=\frac{4}{5}$，则 $\sin 2x=2\sin x\cos x=\sin^2 x=\frac{4}{5}$，**故 D 正确.**

10. ABD 【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，所以 $f(x)$ 的最小正周期是$\frac{2\pi}{2}=\pi$，**故 A 正确；**

因为$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+1=1$，所以 $f(x)$ 的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{12},1\right)$中心对称，**故 B 正确；**

$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，

令 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$，则 $g(-x)=2\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\neq g(x)$，

所以$f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$不是偶函数，**故 C 错误；**

令 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$，

得 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，

所以 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

得 $x=-\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$，所以 $x_1=-\frac{\pi}{6}$，$x_2=\frac{5\pi}{6}$，$x_3=\frac{\pi}{2}$，$x_4=\frac{3\pi}{2}$，

所以$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$上恰有 4 个零点，**故 D 正确.**

11. ABD 【解析】由题意可得$f(x)=\sin 2x-$

$\sqrt{3}\cos 2x+\left|2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $f(x+\pi)=\left|2\sin\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{6}\right]\right|-2\cos\left[2(x+\pi)+\frac{\pi}{6}\right]=\left|2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right|-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=f(x)$,

可知 π 是 $f(x)$ 的一个周期.

令 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$, 即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$,

则 $2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$;

令 $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<0$, 即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)<0$,

则 $2k\pi+\pi<2x+\frac{\pi}{6}<2k\pi+2\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, 解得 $k\pi+\frac{5\pi}{12}<x<k\pi+\frac{11\pi}{12}$, $k\in\mathbf{Z}$.

结合周期性可取 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$ 和 $\frac{5\pi}{12}<x<\frac{11\pi}{12}$,

若 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$, 则 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$;

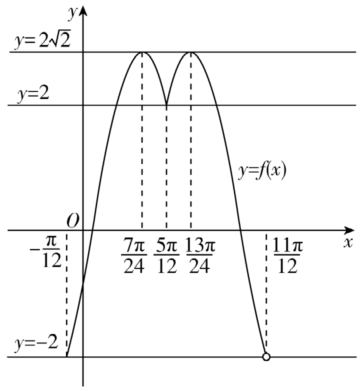
若 $\frac{5\pi}{12}<x<\frac{11\pi}{12}$, 则 $f(x)=-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sqrt{2}\cdot\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right)$.

综上所述, 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 上, $f(x)=$

$$\begin{cases}2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right), -\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12},\\ -2\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5\pi}{12}\right), \frac{5\pi}{12}<x<\frac{11\pi}{12},\end{cases}$$

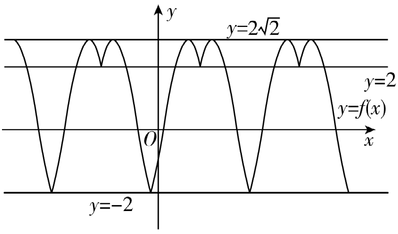
可得 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$ 上的大致图

象，如图①所示，



图①

结合周期性可得 $f(x)$ 的大致图象如图②所示.



图②

由 $f(x)$ 的大致图象可知，$f(x)$ 的最小正周期是 π，**故 A 正确.**

由 $f(x)$ 的大致图象可知，$f(x)$ 的值域是 $[-2,2\sqrt{2}]$，**故 B 正确.**

由 $f(x)$ 的大致图象可知，其图象没有对称中心，所以不存在 φ，使得 $f(x+\varphi)$ 是奇函数，**故 C 错误.**

因为 $x\in\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{7\pi}{6}\right]$，由周期性可知等价于 $x\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，

由图象可知 $f(x)$ 在 $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{4\pi}{3},-\frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减，**故 D 正确.**

12. -3　【解析】$\tan 2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1+2}{1-1\times 2}=-3$.

13. $\frac{\pi}{3}$　$\sqrt{3}$　【解析】因为 $a\sin\frac{A+B}{2}=c\sin A$，在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理知，$\sin A\sin\frac{A+B}{2}=\sin C\sin A$，

所以 $\sin A\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\sin A$，因为 $A\in(0,\pi)$，$C\in(0,\pi)$，

所以 $\sin A\neq 0$，$\cos\frac{C}{2}\neq 0$，所以 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，

又 $\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$.

由已知及余弦定理得 $4=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}=a^2+b^2-ab\geqslant 2ab-ab=ab$，所以 $ab\leqslant 4$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

则 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4=\sqrt{3}$，即 S 的最大值为 $\sqrt{3}$.

14. $(-1,1)$ 【解析】因为 $f(x)=\cos 2x-m\sin x=-2\sin^2 x-m\sin x+1$，

由 $f(x)=0$，可得 $-2\sin^2 x-m\sin x+1=0$，

所以 $m\sin x=-2\sin^2 x+1$，

因为 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$，所以 $\sin x\in(0,1]$，

所以 $m=-2\sin x+\frac{1}{\sin x}$，

令 $t=\sin x$，则 $t\in(0,1]$，所以 $m=-2t+\frac{1}{t}$，

令 $g(t)=-2t+\frac{1}{t}$，$t\in(0,1]$，

因为 $y=-2t$ 与 $y=\frac{1}{t}$ 在 $(0,1]$ 上均单调递减，

所以 $g(t)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减.

因为 $m=-2\sin x+\frac{1}{\sin x}$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$ 上有 2 个解，

则 $\sin x=t$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$ 上有 2 个解，

则 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，所以 $m=-2t+\frac{1}{t}\in(-1,1)$.

15.【解】(1) $f(x)=2\sqrt{3}\sin(\pi-x)\cos x+2\cos^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos 2x+1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时, $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$,

所以 $-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$,

$-1\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2$,

则 $0\leqslant 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1\leqslant 3$,

因此, 函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上的值域为 $[0,3]$.

(3) $g(x)=f(x)-1=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$ 时, $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2m+\frac{\pi}{6}$,

若函数 $g(x)=f(x)-1$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},m\right]$ 上有且仅有两个零点,

则 $\pi\leqslant 2m+\frac{\pi}{6}<2\pi$, 解得 $\frac{5\pi}{12}\leqslant m<\frac{11\pi}{12}$,

即 m 的取值范围为 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}\right)$.

16.【解】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin C\sin A+\sin A\cos C=\sin B+\sin C$,

因为 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,

所以 $\sqrt{3}\sin C\sin A+\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C$,

即 $\sqrt{3}\sin C\sin A=\cos A\sin C+\sin C$,

因为 $C\in(0,\pi)$, 所以 $\sin C\neq 0$,

所以 $\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$, 即 $2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$, $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, 因为 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,

因此, $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$, 则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由 (1) 可知 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$, 由题意可知 $\angle ABD=\frac{\pi}{12}$, $\angle ACD=\frac{\pi}{6}$,

又 $\angle DBC=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$，则

$\angle ACB=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$，

则 $\angle BCD=\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$，则 $\angle BDC=\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理可知 $\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{4}}$，则 $\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，

故 $AC=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，

在 $\triangle DBC$ 中，由正弦定理可知

$\frac{BC}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}}$，则 $\frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{CD}{\frac{1}{2}}$，故 $CD=2\sqrt{2}$，

在 $\triangle DAC$ 中，由余弦定理知 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos\angle ACD}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

17.【解】若选①：(1) 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，

$2\sin(2\ 024\pi-\alpha)=\cos(2\ 024\pi+\alpha)$，

则 $-2\sin\alpha=\cos\alpha$，易知 $\cos\alpha\neq0$，

则 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

则 $\frac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{3\tan\alpha+4}{1-\tan\alpha}=\frac{-\frac{3}{2}+4}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$.

(2) $\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又 $\alpha\in(0,\pi)$，$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

故 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$

解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

则 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又 $\alpha+\beta\in(\pi,2\pi)$，则 $\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{4}$.

若选②：(1)已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

又 $\alpha\in(0,\pi)$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

则 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

则 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha+4}{1-\tan\alpha}=\dfrac{-\dfrac{3}{2}+4}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{5}{3}$.

(2) $\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\cos\beta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

则 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

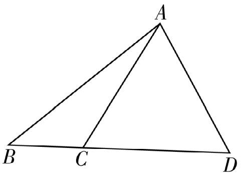
则 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由(1)知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\alpha+\beta\in(\pi,2\pi)$，故 $\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{4}$.

18.【解】(1)如图，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理可得 $AC^2+BC^2-AB^2=2AC\cdot BC\cos\angle ACB$，即 $4+BC^2-7=2\times2\times BC\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，整理得 $(BC+3)(BC-1)=0$，解得 $BC=1$(负值舍去).

又因为 $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，所以 $CD=2$.

又因为 $\angle ACD=\pi-\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$ 且 $AC=2$，所以 $\triangle ACD$ 为等边三角形，所以 $AD=2$.



(2)由 $\lambda>0$ 可知，点 D 在线段 BC 的延长线上.

设 $\angle BAC=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$，则 $\angle DAC=2\angle BAC=2\alpha$，$\angle B=\dfrac{\pi}{3}-\alpha$，$\angle D=\dfrac{2\pi}{3}-2\alpha$.

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\alpha}=$

$\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$，所以 $BC=\frac{AC\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$.

在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin 2\alpha}=\frac{AC}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)}$，则 $CD=\frac{AC\cdot\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)}$.

所以 $\lambda=\frac{BC}{CD}=\frac{\frac{AC\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}}{\frac{AC\cdot\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)}}$

$=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\alpha\right)}{\sin 2\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$

$=\frac{2\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$

$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$

$=\frac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$，

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，所以 $\tan\alpha\in(0,\sqrt{3})$，所以 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\alpha\in\left(\frac{1}{2},2\right)$，

所以 λ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

19.【解】(1)令 $f(x)=0$，即 $3x-1=0$，

得 $x=\frac{1}{3}$，所以 $A=\left\{\frac{1}{3}\right\}$，

令 $f(f(x))=0$，

即 $3(3x-1)-1=0$，

得 $x=\frac{4}{9}$，所以 $B=\left\{\frac{4}{9}\right\}$.

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{2}x=\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，

令 $f(x)=0$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=0$，

得 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $x=-\frac{1}{2}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $A=\left\{x\,\middle|\,x=-\frac{1}{2}+2k,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

令 $f(f(x))=0$,则

$\sin\left\{\frac{\pi}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)\right]+\frac{\pi}{4}\right\}=0$,

所以 $\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+2k,k\in\mathbf{Z}$,

由正弦函数的有界性,可得只有 $k=0$ 满足,所以 $\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$ 或 $\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$,

解得 $x=-\frac{5}{6}+4n$ 或 $x=-\frac{13}{6}+4n,n\in\mathbf{Z}$,

所以 $B=\left\{x\,\middle|\,x=-\frac{5}{6}+4n\text{ 或 }x=-\frac{13}{6}+4n,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

(3)设 $x_0\in A$,则 $f(x_0)=0$,因为 $A=B$,

所以 $x_0\in B$,所以 $f(f(x_0))=0$,

所以 $f(0)=m\sin 0+s\cos 0=0$,得 $s=0$,

所以 $f(x)=m\sin x$.

当 $m=0$ 时,$f(x)=0$,显然 $A=B\neq\varnothing$ 满足条件;

当 $m\neq 0$ 时,$A=\{x\mid m\sin x=0\}=\{x\mid x=k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}\}$,$B=\{x\mid m\sin(m\sin x)=0\}$,所以 $m\sin x=k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z}$,

因为 $\forall x\in A$,$\sin x\neq\frac{k_1\pi}{m}$,$k_1\in\mathbf{Z}$,且 $k_1\neq 0$,又 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $\left|\frac{k_1\pi}{m}\right|>1$,

即 $|m|<|k_1\pi|$ 恒成立,$k_1\in\mathbf{Z}$,且 $k_1\neq 0$,

所以 $|m|<\pi$,所以整数 m 为 $-3,-2,-1,1,2,3$,所以整数 m 的最大值为 3.